

УДК 621.7.043

[https://doi.org/10.32515/2664-262X.2026.13\(44\).117-127](https://doi.org/10.32515/2664-262X.2026.13(44).117-127)**Р. Г. Пузир**, проф., д-р техн. наук, **Р. Р. Козлов***Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського,  
м. Кременчук, Україна**e-mail: puzyruslan@gmail.com*

## Огляд аналітичних методів аналізу напружено-деформованого стану заготовки під час роздавання трубних напівфабрикатів

Показано, що з метою точного опису процесу роздавання розглядаються рівняння рівноваги елементу заготовки у полярних координатах з окремим додаванням умов тертя, вигину на вільній поверхні та зміцнення матеріалу. Але питання визначення деформованого стану залишається відкритим. Більш точним моделюванням є визначення полів напружень та деформацій за теорією оболонок, але отримання замкнутого аналітичного рішення викликає математичні труднощі. Подальші дослідження будуть процесу будуть зосереджені на синергії обох методів теоретичного аналізу.

**роздавання, циліндрична заготовка, рівняння рівноваги, зміцнення, товщина стінки**

**Постановка проблеми.** Роздавання трубчастих заготовок, як процес листового штампування, використовується для збільшення діаметру кінців порожнистих циліндрів або їх середньої частини. Використовується в автомобільній та машинобудівній галузях для отримання патрубків, з'єднувальних елементів [1], як елемент технологічного процесу виготовлення, наприклад, ободів коліс [2], у нафто та газодобувній галузях для збільшення діаметру обсадних труб у свердловині [3], у аерокосмічній галузі у якості абсорберів кінетичної енергії під час посадки літальних апаратів [4] і т. д. Коло галузей застосування таких виробів не обмежується приведеними вище. Але, залишається відкритим питання точного теоретичного опису процесу з отриманням універсальних аналітичних рівнянь, прийнятних для інженерних розрахунків. Такі вирази необхідні для побудови технологічних процесів роздавання з прогнозуванням властивостей виробу на етапі проектування.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Теоретичний аналіз процесу роздавання циліндричних порожнистих виробів базується на теорії процесів листового штампування [5, 6], деформаційної теорії пластичності [7, 8] та теорії пластичної течії [9]. Особливу увагу автори приділяють розробці алгоритму розрахунку напружень, які діють у стінках заготовки під час навантаження. Для досягнення більш точного рішення вводяться окремо додаткові складові, такі як коефіцієнт тертя між інструментом та заготовкою [5], додаткові напруження, які з'являються від згинального та розгинального моменту [6, 12], уточнюються навантаження, які призводять до втрати стійкості недеформованої частини [11], вводяться умови руйнування стінки у повздовжньому напрямку за рахунок локалізації деформацій [13]. Інші дослідники зосереджують увагу на визначенні деформованого стану шляхом введення умов зв'язку між приростом деформацій та головними напруженнями та підстановки їх в рівняння рівноваги для вісесиметричного напруженого стану [9, 10]. Такі рішення дають змогу оцінити розподіл деформацій у деформованій частині заготовки.

**Постановка завдання.** Таким чином, метою даного дослідження є огляд методів аналітичного моделювання процесу роздавання трубчатих циліндричних заготовок та формування стійких уявлень про основні фактори впливу на напружено-деформований стан стінок заготовки для створення математичної моделі несиметричного формозмінення виробів з розтрубом.

**Виклад основного матеріалу.** Так, класична теорія листового штампування розглядає поле напружень контактної конічної ділянки, використовуючи рівняння рівноваги при вісесиметричному деформуванні для плоского напруженого стану [5, 6]. Використовуються спрощені рівняння рівноваги для отримання простих виразів для відшукування величини напружень, які діють в осередку деформації. В полярних координатах вони мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} + 2\tau_{\rho\theta} + \rho \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} &= 0, \\ \rho \frac{\partial \sigma_{\rho}}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} r + (\sigma_{\rho} - \sigma_{\theta}) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

де  $\sigma_{\rho}$  та  $\sigma_{\theta}$  – нормальні напруження, які діють у меридіональному та тангенціальному напрямках;  $\tau_{\rho\theta} = \tau_{\theta\rho}$  – дотичні напруження, які діють на площадках перпендикулярних до тангенціального та меридіонального напрямку;  $\rho$  – поточний радіус заготовки.

У випадку вісесиметричного деформування і плоского напруженого стану рівняння (1) замінюються одним виразом

$$\rho \frac{d\sigma_{\rho}}{d\rho} + \sigma_{\rho} - \sigma_{\theta} = 0. \quad (2)$$

Однак, прагнення авторів, наблизити математичні вирази до реального процесу деформування ускладнили це рівняння введенням коефіцієнту тертя  $\mu$  та куту нахилу утворюючої пуансону  $\alpha$

$$\rho \frac{d\sigma_{\rho}}{d\rho} + \sigma_{\rho} - \sigma_{\theta}(1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha) = 0. \quad (3)$$

Інтегрування рівняння (3) спільно з умовою пластичності по гіпотезі максимальних дотичних напружень  $\sigma_{\theta} - \sigma_{\rho} = \sigma_s$ , де  $\sigma_s$  - межа пластичності металу заготовки, дозволило отримати наглядні і прості аналітичні вирази для визначення нормальних напружень, діючих в осередку деформації. Під час інтегрування використовували граничні умови  $\sigma_{\rho} = 0$  при  $\rho = R_u$

$$\sigma_{\rho} = -\sigma_s \left( 1 + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\mu} \right) \left[ 1 - \left( \frac{\rho}{R_u} \right)^{\frac{\mu}{\operatorname{tg} \alpha}} \right]. \quad (4)$$

Розкладання степенної та логарифмічної функцій у ряд зі збереженням перших їх членів та заміна отриманих виразів у формулі (4), дало змогу спростити рівняння:

– для меридіональних напружень  $\sigma_{\rho} = -\sigma_s \left( 1 + \frac{\mu}{\operatorname{tg} \alpha} \right) \left( \frac{R_u}{\rho} - 1 \right)$ ;

– для тангенціальних напружень  $\sigma_{\theta} = -\sigma_s \left[ 1 - \left( 1 + \frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha} \right) \left( \frac{R_u}{\rho} - 1 \right) \right]$ .

Врахування згинального моменту, який виникає під час виходу конічної поверхні заготовки на циліндричну ділянку та під час початку роздавання та збільшує стискаючі меридіональні напруження, відбувається за рахунок множника  $(3 - 2 \cos \alpha)$  і формула (4) приймає вигляд

$$\sigma_{\rho} = -\sigma_s \left[ \left( 1 + \frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha} \right) \left( \frac{R_u}{r_3} - 1 \right) + \sqrt{\frac{2s}{R_u}} \sin \alpha \right] (3 - 2 \cos \alpha), \quad (5)$$

де  $R_u$  – радіус напівфабрикату на циліндричній ділянці пуансону;  $r_3$  – радіус заготовки.

Під час пластичної деформації відбувається зміцнення металу заготовки, що збільшує величину стискаючих меридіональних напружень. Врахування зміцнення відбувається заміною  $\sigma_s$  середнім для осередку деформації напруженням текучості. Це середнє значення  $\sigma_s$  визначають, як середнє арифметичне між максимальним та мінімальним значеннями напруження текучості в осередку деформації (при лінійній апроксимації кривої зміцнення) або, як значення напруження текучості під час деформації, яка дорівнює середній для осередку деформації  $\varepsilon_0$  (при ступеневій апроксимації кривої зміцнення). Використовуючи ступеневу апроксимацію меридіональне напруження буде дорівнювати

$$\sigma_{\rho} = -\frac{\sigma_e}{2(1-\psi_{uu})} \left[ \frac{R_u - r_3}{\psi_{uu}(R_u + r_3)} \right]^{1-\psi_{uu}} \left[ \left( 1 + \frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha} \right) \left( \frac{R_u}{r_3} - 1 \right) + \sqrt{\frac{2s}{R_u}} \sin \alpha \right] \times \\ \times \left( 1 + \sqrt{\frac{r_3}{R_u}} \right) (3 - 2 \cos \alpha), \quad (6)$$

де  $\psi_{uu}$  – відносне зменшення площі поперечного перетину до моменту початку утворення шийки;  $\sigma_e$  – межа міцності металу заготовки.

Таким чином, теорія листового штампування приводить до визначення напруженого стану заготовки в осередку деформації та за її межами. За формулою (6) можливо визначити величину максимальних меридіональних напружень, які діють в недеформованих стінках циліндра та перейти к питанням втрати стійкості. Допущення, щодо осесиметричності навантаження та плоского напруженого стану, дали змогу авторам отримати залежності (5), (6), які містять основні технологічні та конструктивні фактори процесу роздавання, як то, радіус заготовки та отриманої деталі, кут нахилу утворюючої конусу пуансону, товщина заготовки, коефіцієнт тертя та значення механічних властивостей металу. Тобто, дослідник має у своєму арсеналі набір параметрів, за допомогою яких можливо регулювати напружений стан заготовки, змінюючи той чи інший чинник, або їх комбінацію та теоретично досліджувати процес. Такий підхід залишає відкритим питання щодо деформованого стану заготовки. Теоретично, перехід від напружень до деформацій відбувається за деформаційною теорією пластичності, але фінальні залежності для визначення деформацій значно ускладнюються і мають обмежене застосування у практичних розрахунках.

Для отримання рішень для напружено-деформованого стану ділянки заготовки під час роздавання Надаї А. [8] запропонував підхід, заснований на безмоментній теорії

оболонки обертання та деформаційній теорії пластичності. Вирішення цього завдання засновано на двох допущеннях Кірхгофа-Лява: 1) сукупність матеріальних частинок, які розташовані на нормалі до серединної поверхні оболонки до деформації, розташовані також на нормалі до її серединної поверхні і після деформації, і тому деформований стан оболонки визначається тільки деформованим станом її серединної поверхні; 2) усі компоненти напружень, які мають напрямком нормалі до серединної поверхні, вельми малі в порівнянні з іншими напруженнями. Ці два постулати означають, що кожен тонкий елементарний шар матеріалу, паралельний до серединної поверхні оболонки, знаходиться в умовах плоского напруженого стану. Інше допущення, прийняте автором, стосується нестисливості матеріалу заготовки, що значно спрощує рішення завдання.

Використовуються відомі рівняння рівноваги для посудин

$$\left. \begin{aligned} \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} &= p, \\ 2\pi r T_1 \sin \theta &= P, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

де  $T_1 = \sigma_1 h$  – меридіональне зусилля, що розтягує;  $T_2 = \sigma_2 h$  – тангенціальне зусилля;  $h$  – товщина оболонки;  $p$  – розподілене навантаження (тиск);  $r$  – радіус оболонки;  $\theta$  – кут нахилу нормалі до осі оболонки.

Напруження визначаються формулами

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= p \frac{r}{h} S_1, \quad \sigma_2 = p \frac{r}{h} S_2, \\ S_1 &= \frac{PR_2}{2\pi r^3}, \quad S_2 = \frac{R_2}{r} - \frac{R_2}{R_1} S_1 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

де  $R_1, R_2$  – головні радіуси кривини серединної поверхні;  $S_1 = T_1 - \frac{1}{2} T_2 = h \frac{\sigma_1}{e_1} \varepsilon_1$ ;

$S_2 = T_2 - \frac{1}{2} T_1 = h \frac{\sigma_2}{e_2} \varepsilon_2$ ;  $\sigma_i$  – інтенсивність напружень;  $e_i$  – інтенсивність деформацій;

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$  – меридіональна та тангенціальна відносні деформації.

Для циліндричної заготовки вирази (8) спрощуються

$$\sigma_1 = \frac{PR_2}{2\pi r^2 h}, \quad \sigma_2 = \frac{pR_2}{h} - \frac{R_2}{R_1} \sigma_1. \quad (9)$$

Сила  $P$  в любому перетині дорівнює

$$P = 2\pi r h_0 q + 2\pi \int_r^R \rho p \rho d\rho, \quad (10)$$

де  $h_0$  – початкова товщина заготовки;  $q$  – тиск на вільний кінець труби;  $\rho$  – поточний радіус заготовки.

Формули (9) та (10) наведені для визначення, в першу чергу, деформацій трубної заготовки. Для спрощення кінцевих рівнянь використовується умова пластичності Треска-Сен-Венана

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \sigma_s \delta, \quad (11)$$

де  $\delta$  – коефіцієнт Лоде, який враховує дію нормального напруження у напрямку осі  $Z$ ,  
 $\frac{1}{\sqrt{3}} \geq \delta \geq 1$ .

Використовуючи додаткові закони про нерозривність деформацій та незмінність об'єму під час пластичної деформації, отримані формули для знаходження розподілу напружень та деформацій для всього осередку деформації:

$$\text{– відносне тангенціальне подовження } \varepsilon_2 = \frac{\rho - r}{r} = \bar{r} - 1;$$

$$\text{– відносне меридіональне подовження } \varepsilon_1 = (\bar{r} - 1) \frac{E_2 \bar{\sigma}_1 - E_1}{(3 - 2E_2) \bar{\sigma}_1 + 2E_1};$$

$$\text{– відносне подовження елемента оболонки у напрямку її нормалі } \varepsilon_2 = \frac{h - h_0}{h_0} = \frac{1}{\chi} - 1.$$

$$\text{де } \bar{\sigma}_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_s \delta}; E_1 = 1; E_2 = 1.$$

Закон розподілу напруження  $\bar{\sigma}_1$  вздовж утворюючої циліндричної заготовки приймає вигляд

$$E_1 z = \frac{d}{d\bar{r}} \left( \frac{\bar{r} \bar{\sigma}_1}{\chi} \right) = \frac{(2 - E_2) \bar{\sigma}_1 + E_1}{\chi(\bar{r})}, \quad (12)$$

а закон зміни товщини стінки виглядає наступним чином

$$\chi = \bar{r} \frac{(3 - 3E_2 + \bar{r}E_2) \bar{\sigma}_1 + (3 - \bar{r})E_1}{(3 - 2E_2) \bar{\sigma}_1 + 2E_1}, \quad (13)$$

$$\text{де } z = \frac{E_1}{\varphi} \frac{d}{d\bar{r}} \left( \frac{\bar{r} \varphi \bar{\sigma}_1}{\chi} \right); \varphi = \frac{r}{R_2} = \sin \theta = \text{const} > 0.$$

Подані рівняння інтегруються чисельно, тому що не завжди форму інструменту можливо представити у вигляді аналітичної залежності.

Таким чином, представлена математична модель процесу роздавання надає змогу визначити розподіл напружено-деформованого стану заготовки у кожній ділянці пластично деформованої частини, а також з'ясувати товщину та довжину готового виробу. Але, недоліком такого підходу, на наш погляд, є те, що не враховано зміцнення металу заготовки під час пластичної деформації та використання методів чисельного інтегрування отриманих рівнянь. Такий підхід інтегрування декілька зменшує інформативність кінцевих формул, не дає змогу дослідити вагу кожного параметра технологічного процесу щодо його регулювання. Однак, розвиток цифрових засобів розрахунку та комп'ютерних програм дозволяє створити на базі даних рівнянь потужний інструмент для аналізу процесів роздавання циліндричних напівфабрикатів.

Джонсон В. [9] у своїх працях розглядає роздавання трубчатої заготовки, як процес осесиметричної деформації та нехтує згинальними моментами, діючими в меридіональному напрямку. Тобто, так само використовує безмоментну теорію оболонок обертання. Матеріал заготовки – ідеальний жорстко-пластичний. Приймається, що напружений стан ділянки напівфабрикату плоский з меридіональними та тангенціальними головними напруженнями.

Кінцеве рівняння рівноваги з урахуванням поверхневого навантаження та тертя виглядає наступним чином

$$r \frac{d\sigma_m}{dr} + \frac{r}{h} \frac{dh}{dr} \sigma_m + \sigma_m - k\sigma_t = 0, \quad (14)$$

де  $k = 1 + f \operatorname{ctg} \alpha$ ;  $r$  – поточний радіус заготовки;  $h$  – товщина заготовки;  $\sigma_m$  та  $\sigma_t$  – нормальні напруження, які діють у меридіональному та тангенціальному напрямках;  $f$  – коефіцієнт тертя;  $\alpha$  – кут між дотичною до меридіану та віссю заготовки.

Для подальшого інтегрування рівняння рівноваги (14) використана теорія пластичної течії, де приріст деформацій в окружному напрямку  $d\varepsilon_t$  та в напрямку нормалі до оболонки  $d\varepsilon_v$  пов'язані з приростом радіуса та товщини відношеннями

$$d\varepsilon_t = \frac{dr}{r}; d\varepsilon_v = \frac{dh}{h}. \quad (15)$$

Тому рівняння рівноваги (14) може бути записано у наступній формі

$$r \frac{d\sigma_m}{dr} + \frac{d\varepsilon_v}{d\varepsilon_t} \sigma_m + \sigma_m - k\sigma_t = 0. \quad (16)$$

Перехід від приростів деформацій до напружень відбувається за теорією пластичної течії

$$\frac{d\varepsilon_v}{d\varepsilon_t} = -\frac{\sigma_m - \sigma_t}{2\sigma_t - \sigma_m}. \quad (17)$$

Тоді рівняння (16) приймає вигляд

$$r \frac{d\sigma_m}{dr} - \frac{\sigma_m - \sigma_t}{2\sigma_t - \sigma_m} \sigma_m + \sigma_m - k\sigma_t = 0. \quad (18)$$

Компоненти напружень повинні задовольняти умові пластичності Губера-Мізеса у формі

$$\sigma_m^2 + \sigma_m \sigma_t + \sigma_t^2 = \sigma_s^2. \quad (19)$$

Далі, для задоволення умовам пластичності та рівнянням рівноваги компоненти напружень представляються у формі

$$\sigma_m = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_s \cos \psi; \sigma_t = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_s \cos \left( \psi - \frac{\pi}{3} \right), \quad (20)$$

де  $\psi$  – кут виду напруженого стану, для даного випадку  $\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{5}{6} \pi$ .

Підставляючи рівняння (20) у (18) та інтегруючи, отримано рівняння для обчислення безрозмірного радіусу, який залежить від  $\psi$

$$\frac{r}{r_1} = \exp \int_{\psi_1}^{\psi} \frac{2 \operatorname{tg}^2 \psi d\psi}{-\sqrt{3} + (1-k) \operatorname{tg} \psi - \sqrt{3} k \operatorname{tg}^2 \psi}, \quad (21)$$

де  $r_1$  – радіус заготовки;  $\psi$  – значення функції  $\psi$  при  $r = r_1$ .

Товщина стінки обраховується за наступною залежністю

$$\frac{h}{h_1} = \exp \left[ - \int_{\psi_1}^{\psi} \frac{tg\psi (tg\psi + \sqrt{3}) d\psi}{-\sqrt{3} + (1-k)tg\psi - \sqrt{3}ktg^2\psi} \right]. \quad (22)$$

Подане рівняння (22) пов'язує товщину стінки з функцією  $\psi$ .

Автор пропонує обчислювати інтеграли (21) та (22) чисельно.

Таке рішення дає відповіді за запитання щодо розподілу напружень та деформацій під час пластичного формозмінення, але не дає змогу оцінити вплив технологічних параметрів процесу роздавання на величину кожної складової. Так, виходячи з формул (20), напруження залежать тільки від кута виду напруженого стану  $\psi$  і не враховують кута нахилу конусу пуансону, товщини заготовки та коефіцієнту тертя. Це не зовсім зручно з технологічної точки зору. Але, важливим є отримання залежностей, щодо розрахунку товщини готового виробу та його кінцевого радіусу.

Закордонні автори присвячують теоретичному аналізу операціям роздавання трубних заготовок також дуже багато уваги. Так, починаючи з рішення Р. Хілла [10] 1950 року, подальші дослідження зосереджуються на спрощенні рівнянь рівноваги за рахунок допущення про плоский напружений стан та об'ємний деформований.

Наприклад, дослідники [13], також як і Р. Хілл, розглядають два рівняння рівноваги. Перше рівняння складається з проекцій усіх зусиль, діючих на елемент заготовки у напрямку, перпендикулярному до матриці

$$q \left( r \Delta\theta \frac{dr}{\sin \alpha} \right) = \sigma_\theta \left( t \frac{dr}{\sin \alpha} \right) \cos \alpha \sin \Delta\theta. \quad (23)$$

Друге рівняння рівноваги дорівнює сумі усіх сил, діючих на елемент у напрямку паралельному до утворюючої матриці

$$(r + dr)(t + dt)\Delta\theta(\sigma_z + d\sigma_z) = tr\Delta\theta\sigma_z + r\Delta\theta \frac{dr}{\sin \alpha} \mu q + t \frac{dr}{\sin \alpha} \sigma_\theta \sin \alpha \sin \Delta\theta,$$

де  $q$  – тиск між матрицею та стінкою заготовки;  $r$  – радіус заготовки;  $\alpha$  – половина кута матриці;  $\Delta\theta$  – кут між меридіональними площинами, які відсікають елементарний елемент заготовки;  $\sigma_\theta$  – середнє тангенціальне напруження;  $t$  – товщина заготовки;  $\sigma_z$  – середнє меридіональне напруження;  $\mu$  – коефіцієнт тертя.

Шляхом рішення представлених рівнянь рівноваги разом з критерієм пластичності по гіпотезі Губера-Мізеса та представлення відношення швидкостей деформації через напруження за виразом  $\frac{dt}{dr} = \frac{\sigma_z + \sigma_\theta}{\sigma_z - 2\sigma_\theta} \frac{t}{r}$ , були отримані диференціальні формули для обчислення товщини та радіусу напівфабрикату улюбій зоні перетину

$$r \frac{d\sigma_z}{dr} + \frac{\sigma_z(2\sigma_z + \sigma_\theta) + (1 + \mu ctg\alpha)\sigma_\theta(\sigma_z + 2\sigma_\theta)}{\sigma_z + 2\sigma_\theta} = 0, \quad (24)$$

$$t \frac{d\sigma_z}{dt} + \frac{\sigma_z(2\sigma_z + \sigma_\theta) + (1 + \mu ctg\alpha)\sigma_\theta(\sigma_z + 2\sigma_\theta)}{\sigma_z - \sigma_\theta} = 0. \quad (25)$$

Інтегрувати рівняння (24) та (25) Р. Хілл пропонує чисельно. Але, в роботі [11] автором запропоновано аналітичне інтегрування аналогічних диференціальних рівнянь і отримано вирази стосовно  $r$  та  $t$

$$\ln(x_r) = \frac{y}{mb} + 2 \frac{\ln(2 - mby + 2mb^2)}{m^2 b^2} + c_r, \quad (26)$$

$$\ln(x_t) = \frac{y}{mb} + 2 \frac{\ln(2 - mby + 2mb^2)}{m^2 b^2} + 3 \frac{\ln(2 - mby + 2mb^2)}{m} + c_t, \quad (27)$$

де  $c_r$  та  $c_t$  – константи інтегрування.

Ці константи знаходять з граничних умов:  $y = 0, x_r = 0$  та  $y = 0, x_t = 0$ , тоді

$$c_r = -2 \frac{\ln(2 + 2mb^2)}{m^2 b^2}, \quad c_t = -(2 - 3mb^2) \frac{\ln(2 + 2mb^2)}{m^2 b^2},$$

де  $m = \mu \operatorname{ctg} \alpha$ ;  $y = \frac{\sigma_z}{\sigma_e}$ ;  $x_t = \frac{t}{h}$ ;  $x_r = \frac{r}{h}$ ;  $b$  – константа першого порядку у рівнянні

пластичності.

Таким чином, бачимо, що для отримання розподілу товщини та радіусу заготовки по утворюючій конічного розтрубу застосовано вирішення комбінації двох рівнянь рівноваги з умовою пластичності Губера-Мізеса та запропоновано використання теорії пластичної течії. Це дало змогу авторам отримати замкнуті аналітичні рівняння. Чисельне вирішення завдання, яке використовує Р. Хілл, також має велике значення, тому що легко автоматизується та візуалізується. Однак, вирази (26) та (27) складно використовувати для технологічних процесів роздавання циліндричних заготовок. Вони заважкі до сприйняття та аналізу впливу основних факторів процесу на кінцевий результат. Такі вирази дуже добре застосовувати для перевірочних та уточнюючих розрахунків під час виведення спрощених аналітичних або емпіричних формул.

У таблиці 1 подано зведений порівняльний аналіз існуючих підходів до визначення напружено-деформованого стану під час роздавання циліндричної заготовки, основні допущення та порівняльні критерії. На рисунку 1 показано складність розв'язання математичних моделей різних авторів та вплив рішень на точність визначення деформованого стану. У таблиці 2 приведені дані (технологічні та конструктивні фактори процесу роздавання), які входять у рівняння математичних моделей роздавання з технологічної точки зору.

Таблиця 1 – Порівняльна таблиця основних підходів

| Існуючі теорії/<br>критерії<br>порівняння | Теорія<br>листового<br>штамп-ння<br>(Keeler, Wang)       | Безмоментна<br>теорія оболонки<br>(Надаї) | Теорія<br>пластичної течії<br>(Johnson)         | Комбінований<br>підхід (Hill та ін.)                               |
|---|--|---|---|--|
| Основне<br>припущення                     | Плоский<br>напружений<br>стан,<br>ігнорується<br>товщина | Кирхгофа–<br>Лява, тонка<br>оболонка      | Ідеальний<br>жорстко-<br>пластичний<br>матеріал | Поєднання рівнянь<br>рівноваги з<br>критерієм<br>пластичності      |
| Врахування<br>тертя                       | Так коефіцієнт<br>$\mu$                                  | Неявно через<br>навантаження              | Так коефіцієнт $f$                              | Так (через параметр<br>$m = \mu \cdot \operatorname{ctg} \alpha$ ) |
| Врахування<br>зміцнення                   | Так (апрокс-ція<br>кривої)                               | Ні (не враховано в<br>явному вигляді)     | Ні  | Частково (через<br>константу $b$ )                                 |
| Тип розв'язку                             | Анал-чний<br>(замкнутий)                                 | Аналітичний<br>(спрощений)                | Напіваналний,<br>потребує<br>інтегрування       | Напіванал-ний/<br>чисельний  |

|   |  |   |   |                                      |
|---|--|---|---|--------------------------------------|
| Існуючі теорії/<br>критерії<br>порівняння       | Теорія<br>листового<br>штамп-ння<br>(Keeler, Wang) | Безмоментна<br>теорія оболонки<br>(Надаї)           | Теорія<br>пластичної течії<br>(Johnson)           | Комбінований<br>підхід (Hill та ін.) |
| Основна<br>вихідна<br>величина                  | Напруження<br>( $\sigma_r, \sigma_\theta$ )        | Зусилля ( $T_\square, T_\square$ )<br>та напруження | Напруження ( $\sigma_m, \sigma_t$ ) та кут $\psi$ | Товщина ( $t$ ) та<br>радіус ( $r$ ) |
| Зручність для<br>технолога                      | Висока (явні<br>формули)                           | Середня (потребує<br>знань теорії<br>оболонки)      | Низька (складні<br>інтеграли)                     | Низька (чисельні<br>методи)          |
| Придатність<br>для<br>чисельного<br>моделювання | Обмежена   | Обмежена  | Висока (через<br>параметризацію)                  | Висока                               |

Джерело: розроблено автором

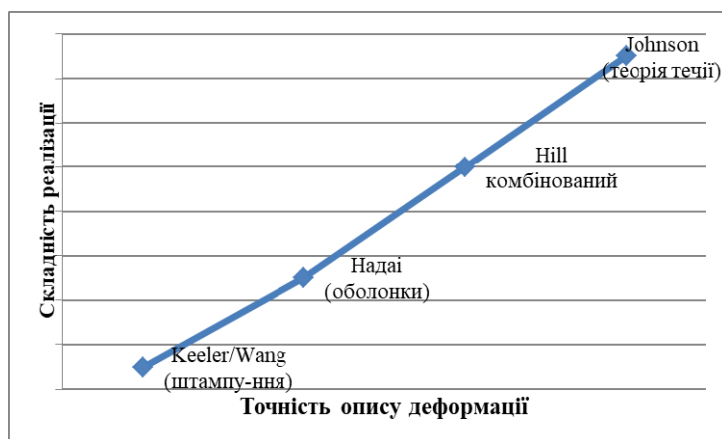


Рисунок 1 – Графік порівняння складності розв'язання моделей та точності підрахунку деформацій

Джерело: розроблено автором

Таблиця 2 - Врахування технологічних факторів

| Фактор впливу                    | Keeler/Wang | Надаї  | Johnson | Hill     |
|----------------------------------|-------------|--------|---------|----------|
| Кут конусу пуансона ( $\alpha$ ) | Так         | Так    | Так     | Так      |
| Товщина заготовки ( $h$ )        | Так         | Так    | Так     | Так      |
| Коефіцієнт тертя ( $\mu/f$ )     | Так         | Неявно | Так     | Так      |
| Зміцнення матеріалу              | Так         | Ні     | Ні      | Частково |
| Втрата стійкості                 | Ні          | Ні     | Ні      | Ні       |

Джерело: розроблено автором

**Висновки.** Критичний огляд підходів до теоретичного аналізу процесу роздавання трубчатої циліндричної заготовки показав, що цей метод пластичного формоутворення достатньо добре досліджений та отримані замкнуті аналітичні рішення. Автори публікацій зосереджені на досягненні різних цілей. Це картина розподілу напружень у стінках напівфабрикату, розподіл деформацій, зменшення товщини виробу та закони збільшення радіусу заготовки на деформованій частині. Але відкритими залишаються питання, щодо втрати стійкості як деформованої, так і

недеформованої частини заготовки. Це ж саме стосується і руйнування стінок зразків. Ґрунтуючись на поданих рішеннях, можна визначити ці питання, вводячи критерії втрати стійкості та руйнування. Дослідження безпосередньо пов'язує технологічні параметри деформації з фундаментальними матеріалознавчими явищами (пластичність, зміцнення та критерії руйнування), що дозволяє не лише описувати, а й прогнозувати поведінку заготовки з урахуванням її реальних механічних характеристик та мікроструктурних змін.

Для подальших досліджень по даній тематиці з врахуванням попередніх напрацювань різних дослідників необхідно застосування синергетичного підходу, який буде враховувати найкращі практики методів теоретичного аналізу листового штампування та технічної теорії оболонок.

Наукова новизна роботи полягає у систематизації, порівняльному аналізі та уточненні різних підходів щодо визначення напружено-деформованого стану заготовки під час роздавання конічним пуансоном. Де виділяються ключові аспекти існуючих теорій, такі як точність опису поля напружень та деформацій, обмеження класичних теорій та зручність застосування отриманих рішень на практиці у технологічних розрахунках. Виділяються невирішені завдання та пропонується комплексний підхід з акцентом на сучасне виробництво з залученням цифрових технологій.

## Список літератури

1. Tan C.J. End Formation of a Round Tube into a Square Section with Reduced Forming Loads. *Applied Mechanics and Materials*. 2013. Vol. 395-396. P. 945–948. Doi: 10.4028/www.scientific.net/amm.395-396.945.
2. Пузир Р.Г., Троцько О.В., Черкашенко В.Ю. Вплив геометричних параметрів циліндричної заготовки на напружено деформований стан при роздачі конічними пуансонами. *Обробка матеріалів тиском: збірник наукових праць*. Краматорськ: 2012. № 4 (33). С. 114-121.
3. Karrech A., Seibi A. Analytical model for the expansion of tubes under tension. *Journal of Materials Processing Technology*. 2010. Vol. 210, № 2. P. 356–362. Doi: 10.1016/j.jmatprotec.2009.09.024.
4. Yang J., Luo M., Hua Yu., Lu Xu. Energy absorption of expansion tubes using a conical–cylindrical die: Experiments and numerical simulation. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2010. Vol. 52, № 5. P. 716–725. Doi: 10.1016/j.ijmecsci.2009.11.015.
5. Keeler S.P. Sheet Metal Stamping Technology – Need for Fundamental Understanding. *Mechanics of Sheet Metal Forming*. Springer. Boston: MA, 1978. P. 3–18. Doi: 10.1007/978-1-4613-2880-3\_1.
6. Wang N.M. A mathematical model of drawbead forces in sheet metal forming. *J. Applied Metalworking*. 1982. Vol. 2. P. 193–199. Doi: 10.1007/BF02834037.
7. Thomsen E.G., Yang C.T., Kobayashi S. Plastic Deformation in Metal Processing. Macmillan, 1965. 486 p.
8. Nádai A. Theory of Flow and Fracture of Solids. McGraw-Hill, 1950. 572 p.
9. Johnson W., Mellor P.B. Plasticity for mechanical engineers. D. Van Nostrand Company LTD, 1962. 412 p.
10. Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity. *Oxford University Press*, New York, 1950. 407 p.
11. Пузир Р. Г., Левченко Р. В., Сіра Ю. Б., Лелюх С. Н. Чисельне моделювання втрати стійкості трубної заготовки під час роздачі сполучних перехідників. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Серія: «Інноваційні технології та обладнання обробки матеріалів у машинобудуванні та металургії». 2019. № 12 (1337). С. 51–56.
12. Пузир Р. Г. Визначення довжини хвилі загасання згинального моменту при роздачі циліндричної заготовки. *Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського*. 2012. № 5 (76), С. 64–66.
13. Al-Abri O.S. Analytical and numerical solution for lardge plastic deformation of solid expandable tubular. *SPE International*. 2011. 152370. P. 1 – 13.

## References

1. Tan, C.J. (2013). End Formation of a Round Tube into a Square Section with Reduced Forming Loads. *Applied Mechanics and Materials*, 395-396, 945–948. Doi: 10.4028/www.scientific.net/amm.395-396.945.
2. Puzyr, R.G., Trocko, O.V. & Cherkashenko, V.Yu. (2012). Vpliv geometrichnih parametrov cilindrichnoyi zagotovki na napruzhenno deformovaniy stan pri rozdachy konichnimi puansonami. *Obrobka materialiv tiskom: zbirnik naukovih prac*. Kramatorsk: 4 (33), 114-121. [in Ukrainian].

3. Karrech, A. & Seibi, A. (2010). Analytical model for the expansion of tubes under tension. *Journal of Materials Processing Technology*, 210, 2, 356–362. Doi: 10.1016/j.jmatprotec.2009.09.024.
4. Yang, J., Luo, M., Hua, Yu, & Lu, Xu. (2010). Energy absorption of expansion tubes using a conical–cylindrical die: Experiments and numerical simulation. *International Journal of Mechanical Sciences*, 52, 5, 716–725. Doi: 10.1016/j.ijmecsci.2009.11.015.
5. Keeler, S.P. (1978). Sheet Metal Stamping Technology – Need for Fundamental Understanding. *Mechanics of Sheet Metal Forming*. Springer. Boston: MA, 3–18. Doi: 10.1007/978-1-4613-2880-3\_1.
6. Wang, N.M. (1982). A mathematical model of drawbead forces in sheet metal forming. *J. Applied Metalworking*, 2, 193–199. Doi: 10.1007/BF02834037.
7. Thomsen, E.G., Yang, C.T. & Kobayashi S. (1965). *Plastic Deformation in Metal Processing*. Macmillan.
8. Nádai, A. (1950). *Theory of Flow and Fracture of Solids*. McGraw-Hill.
9. Johnson, W. & Mellor, P.B. (1962). *Plasticity for mechanical engineers*. D. Van Nostrand Company LTD.
10. Hill, R. (1950). *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford University Press, New York.
11. Puzyr, R. G., Levchenko, R. V., Sira, Yu. B. & Lelyuh, S. N. (2019). Chiselne modelyuvannya vtrati stijkosti trubnoyi zagotovki pid chas rozdachi spoluchnih perehidnikiv. *Visnik Nacionalnogo tehnicznego universitetu «HPI». Seriya: «Innovacijni tehnologiyi ta obladnannya obrobki materialiv u mashinobuduvanni ta metalurgiyi»*, 12(1337), 51–56. [in Ukrainian].
12. Puzyr, R. G. (2012). Vznachennya dovhini hvili zagasannya zginalnogo momentu pri rozdachi cilindrichnoyi zagotovki. *Visnik Kremenchuckogo nacionalnogo universitetu imeni Mihajla Ostrogradskogo*, 5 (76), 64–66. [in Ukrainian].
13. Al-Abri, O.S. (2011). Analytical and numerical solution for lardge plastic deformation of solid expandable tubular. *SPE International*, 152370, 1–13.

**Ruslan Puzyr**, Prof., Dr. Tech. Sci., **Rostyslav Kozlov**

*Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University, Kremenchuk, Ukraine*

### **A Review of Analytical Methods for Evaluating the Stress-strain State of Workpieces During the Processing of Semi-finished Pipe Products**

This study reviews analytical modeling methods for the division of tubular cylindrical blanks and identifies the primary factors influencing the stress-strain state of blank walls. The objective is to establish a mathematical model for the asymmetric deformation of bell-shaped products.

The work provides a critical analysis of existing analytical models of the process of dividing a cylindrical blank with conical punches. It is shown that this processing method is used in various industries and is sufficiently studied from a theoretical point of view. Some researchers focus on calculating the components of the stress tensor. They explicitly identify technological process factors that affect the quality of the final product. Other researchers pay more attention to the deformed state of the blank and, based on the obtained dependencies, calculate changes in the radius of the semi-finished product along the forming conical surface and wall thinning in the deformed part. Various theoretical approaches are used: sheet metal stamping theory, theory of shells of rotation, deformation theory of plasticity, and theory of plastic flow. The obtained dependencies have closed solutions, which are obtained by direct integration of the equilibrium conditions of the workpiece element with the plasticity conditions. But there are solutions that are proposed to be integrated numerically. This integration approach somewhat reduces the informativeness of the final formulas and does not allow for investigating the weight of each parameter of the technological process in relation to its regulation. However, the development of digital calculation tools and computer programs allows the creation of a powerful tool for analyzing the processes of distributing cylindrical semi-finished products based on the equation database.

Questions regarding the loss of stability of both the deformed and undeformed parts of the workpiece remain open. The same applies to the destruction of the walls of the samples. Based on the presented solutions, these questions can be determined by introducing the criteria for loss of stability and destruction. For further research on this topic, taking into account the previous work of various researchers, it is necessary to apply a synergistic approach that will take into account the best practices of methods for theoretical analysis of sheet metal stamping and the technical theory of shells.

**distribution, cylindrical workpiece, equilibrium equation, hardening, wall thickness**

*Одержано (Received) 21.01.2026*

*Прорецензовано (Reviewed) 22.01.2026*

*Прийнято до друку (Approved) 10.02.2026*